

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

**Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone!** Nie dotyczy rozruszników serca.

*Nie wolno korzystać z książek, tablic ani notatek!*

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały udowodnione na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

0. Funkcja  $f: [1789, 1857] \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna we wszystkich punktach przedziału otwartego  $(1789, 1857)$ .

Czy wynika stąd, że

- (a) funkcja  $f$  spełnia warunek Lipschitza na przedziale  $[1789, 1857]$ ?
  - (b)  $f$  jest wypukła na pewnym przedziale długości 1 zawartym w przedziale  $(1789, 1857)$ ?
  - (c) istnieje taka liczba  $c \in (1806, 1813)$ , że  $f(1813) = 7f'(c) + f(1806)$ ?
- 

1. Wykazać, że jeśli funkcja  $f: [-1, 1] \rightarrow (0, 1]$  jest ciągła, to równanie  $x^2 - f(x) = 0$  ma co najmniej dwa pierwiastki.

---

2. Znaleźć taką liczbę  $c$ , by funkcja

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{dla } x = 0, \\ \frac{x-1}{x} e^{-1/|x|} & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}$$

była ciągła w punkcie 0.

Czy funkcja  $f$  ma pochodną w punkcie 0?

Obliczyć kresy funkcji  $f$  na  $(-\infty, \infty)$ .

---

3. Rozstrzygnąć, czy funkcja  $\sin(x \sin x)$  jest jednostajnie ciągła

- (a) na przedziale  $(0, 10]$
  - (b) na półprostej  $[10, \infty)$ .
- 

4. Udowodnić, że jeśli liczby  $a, b, c$  są nieujemne, to

$$a\sqrt{b+c} + b\sqrt{c+a} + c\sqrt{a+b} \leq \sqrt{2(a+b+c)(bc+ca+ab)}.$$


---

5. Niech  $v_n(x) = x^n(x-2)^n$  dla  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Definiujemy  $w_n(x) = (v_n(x))^{(n)}$ . Udowodnić, że funkcja  $w$  jest wielomianem stopnia  $n$ , który ma  $n$  rzeczywistych pierwiastków.

---